数理解析研究所講究録
151巻 1972年 117-122



# Gaussian process の Markov 性の定義に関する一つの注意

名市大 教養　井原俊輔

Pitt [1] は Gaussian process の Markov 性が、Hilbert 変換によって特徴づけられることを注意した。ここでは Markov 性の定義に関する、河野 [2] の議論との関連を見ながら Pitt の結果を紹介する。

[2] と同様, $\{X(t), t \in R^n\}$ を real valued Gaussian random field とする。以下, 記号, 言葉は [2] と全く同じものを使いますので, その定義については [2] を見て下さい。

以下, 集合 $D \in \mathcal{O}$ を fix して考える。$R^n$ 上の関数 $u(t)$ に対し, 次の様な operator $\hat{H}$ $(\equiv \hat{H}_D)$ を考える。

$$\hat{H} u(t) \equiv \begin{cases} u(t), & t \in D \\ -u(t), & t \notin D \end{cases} \tag{1}$$

関数 $u(t)$ に対し, $u^-(t)$, $u^+(t)$ を次の様に定義する。

$$u^-(t) \equiv \begin{cases} u(t), & t \in D \\ 0, & t \notin D \end{cases} \qquad u^+(t) \equiv \begin{cases} 0, & t \in D \\ u(t), & t \notin D. \end{cases}$$

この記号を使えば

$$\hat{H}u(t) = u^-(t) - u^+(t), \quad t \in R^n \tag{1'}$$

である。

次に $\mathcal{H}$ の subspace $\mathcal{H}_0$ を次式で定義する。

$$\mathcal{H}_0 \equiv \overline{\bigcup_{\mathcal{O}\ni G\supset \partial D} \mathcal{H}_0(G)} \tag{2}$$

( $\overline{\cdot}$ は$\mathcal{H}$における closure)　$R^n \supset {}^\forall F$ closed set に対し

$\bigcup_{\substack{G\supset F\\ G:\text{open}}} \mathcal{H}_0(G) = \{u \in \mathcal{H}\,;\ \text{car.}\,u \subset F^c\}$ が成り立つことに

注意すると，次のことが容易にわかる。

$$\mathcal{H}_0 = \overline{\{u \in \mathcal{H};\ \text{car.}\,u \subset (\partial D)^c\}} \tag{2'}$$

Markov 性を上の operator $\hat{H}$ によって特徴づけることが目的である。以下のことが証明できる。

<u>Proposition 1</u>　$\hat{H}(\mathcal{H}_0) \subset \mathcal{H}_0 \Rightarrow \mathcal{H}$は strictly D-local.

( strictly D-local の定義は [2] の Def. 4 を見よ )

<u>証明</u>　$u \in \mathcal{H}$, $\text{car.}\,u \subset (\partial D)^c$ とすると，(2′) より $u \in \mathcal{H}_0$

よって　$u = u^- + u^+ \in \mathcal{H}_0$, かつ仮定より $\hat{H}u = u^- - u^+ \in \mathcal{H}_0$

$$\therefore\quad u^- = \frac{1}{2}(u + \hat{H}u) \in \mathcal{H}_0 \subset \mathcal{H}.$$

<u>Proposition 2</u>　$\mathcal{H}$ が D-regular のとき，$u, \hat{H}u \in \mathcal{H}_0$ なるすべての $u$ に対し，$\|\hat{H}u\| = \|u\| \Rightarrow A$ は D-local.

(ここで，$\|\cdot\|$ は$\mathcal{H}$のノルム。又，D-regular, A が D-local の定義は [2] の Def. 6, 8 を見よ.)

<u>証明</u> $u \in \mathcal{H}_0(D)$, $v \in \mathcal{H}$ car $v \subset D$ とする。A が D-local をいうには, $(u, v) = 0$ をいえばよい。(ここで, $(\cdot,\cdot)$ は $\mathcal{H}$ での内積) $u \in \mathcal{H}_0(D)$ より $u \perp \mathcal{H}(D)$ ([2] の Lemma 1) $\mathcal{H}$ が D-regular だから $u \perp \mathcal{H}^-(D)$.

$$\therefore \quad u \in (\mathcal{H}^-(D))^\perp = \Big(\bigcap_{\mathcal{O} \ni G \supset \bar{D}} \mathcal{H}(G)\Big)^\perp = \overline{\Big(\bigcup_{\mathcal{O} \ni G \supset \bar{D}} \mathcal{H}(G)^\perp\Big)}$$

$$= \overline{\bigcup_{\mathcal{O} \ni G \supset \bar{D}} \mathcal{H}_0(G)} \subset \mathcal{H}_0$$

$$\therefore \quad u \in \mathcal{H}_0 .$$

又, (2′) より $v \in \mathcal{H}_0$, 故に $u + v \in \mathcal{H}_0$.

一方, $u = 0$, on $D$, $v = 0$ on $\bar{D}$ に注意すると,

$$\hat{H}(u+v) = u - v \in \mathcal{H}_0$$

従って, 仮定より.

$$\| u+v \| = \| \hat{H}(u+v) \| = \| u-v \|$$

$$\therefore \quad (u, v) = 0$$

<u>Proposition 3</u> $\{X(t)\}$ が D-Markov $\Rightarrow$ $\mathcal{O} \ni {}^\forall G \supset \partial D$ に対し $\hat{H}$ を $\mathcal{H}_0$ に制限したものは unitary.

<u>証明</u> $u = u^- + u^+ \in \mathcal{H}_0(G)$ とす. $\{X(t)\}$ が D-Markov だから, $\mathcal{H}$ は strictly D-local ([2] Proposition 2)

$$\therefore \quad u^- \in \mathcal{H}, \quad \text{従って} \quad u^+ \in \mathcal{H}.$$

$u \in \mathcal{H}(G)$ だから, 結局, $u^-, u^+ \in \mathcal{H}_0(G)$

$$\therefore \quad \widehat{H} u = u^- - u^+ \in \mathcal{H}_0(G).$$

又，$\widehat{H}(u^- - u^+) = u^- + u^+ = u$ だから結局，$\widehat{H}$ は $\mathcal{H}_0(G)$ を $\mathcal{H}_0(G)$ に onto に map することがわかった。

次に $\widehat{H}$ が $\mathcal{H}_0(G)$ 上で isometry であることを示す。

$\{X(t)\}$ が D-Markov だから，$(u^-, v^+) = 0$ （$\because$ [2]，~~Lemma~~ Proposition 2 の証明より）

$$\therefore \quad \|u\|^2 = \|u^- + u^+\|^2 = \|u^-\|^2 + \|u^+\|^2.$$

$$\|\widehat{H} u\|^2 = \|u^- - u^+\|^2 = \|u^-\|^2 + \|u^+\|^2.$$

$$\therefore \quad \|\widehat{H} u\| = \|u\| \quad \text{for } {}^\forall u \in \mathcal{H}_0(G).$$

以上の3つの Proposition から次のことがわかる。

<u>Theorem</u> $\{X(t)\}$ が D-Markov $\Rightarrow$ $\widehat{H}$ を $\mathcal{H}_0$ に制限したものは unitary。

もし，$\mathcal{H}$ が D-regular ならば，逆も成立。

<u>証明</u> 後半のことは，Proposition 1, 2 と，[2] の Proposition 1, 3 から明らか。

（前半）${}^\forall u \equiv u^- + u^+ \in \mathcal{H}_0$ に対し，${}^\exists u_n \equiv u_n^- + u_n^+ \in \mathcal{H}_0(G_n)$ $u_n \to u$ (in $\mathcal{H}$)．ただし，$\mathcal{O} \ni G_n \supset \partial D$, $G_n \downarrow$.

Proposition 3 で示したように，$u_n^-, u_n^+ \in \mathcal{H}_0(G_n)$，$(u_n^-, u_m^+) = 0$ 従って，$\{u_n^-\}$，$\{u_m^+\}$ も各々 Cauchy 列になり，$u_n^- \to u^-$，$u_n^+ \to u^+$ (in $\mathcal{H}$) がわかる。

$$\therefore \quad u^-, u^+ \in \mathcal{H} \text{ かつ } (u^-, u^+) = 0$$

後は Proposition 3 と同様に，$\hat{H}$ を $\mathcal{H}_0$ に制限したものが，unitary であることがわかる。

特に，$\{X(t), t \in R^1\}$ が stationary Gaussian process の場合には，Theorem の条件は，Hilbert 変換 $H$；

$$HF(x) \equiv \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\pi i} \int_{|y|\geq\varepsilon} \frac{F(x-y)}{y}\, dy, \quad (F \in L^1) \qquad (3)$$

の言葉で表される。即ち，$\{X(t)\}$ の spectral density を $\Delta$ とし，$L^2_{\Delta^{-1}} = L^2(R^1; \Delta^{-1}(x)dx)$ とし，

$$\mathcal{H}_\varepsilon \equiv \{F \in L^2_{\Delta^{-1}};\ \hat{F}(t) = 0 \text{ for } |t| \leq \varepsilon\}$$

（$\hat{F}$ は $F$ の Fourier 変換）

$$\mathcal{H}_0 \equiv \overline{\bigcup_{\varepsilon>0} \mathcal{H}_\varepsilon} \quad (\ \overline{\cdot}\ \text{は } L^2_{\Delta^{-1}} \text{ での closure})$$

とおくと，

<u>Corollary</u>（Pitt [1]）

$\{X(t)\}$ が Markov $\Longleftrightarrow$ Hilbert 変換 $H$ を $\mathcal{H}_0$ に制限したものは unitary.

（今の場合，$\{X(t)\}$ が $(-\infty, 0)$-Markov のとき，単に $\{X(t)\}$ は Markov という）

<u>証明</u> 写像，$L^2_{\Delta^{-1}} \ni F \longleftrightarrow \hat{F} \in \mathcal{H}$ が $L^2_{\Delta^{-1}}$ と $\mathcal{H}$ を unitary に対応させていることと，Hilbert 変換 $H$ に対し，変換 $\hat{H}$ を

$$\hat{H}\hat{F} \equiv \widehat{HF} \quad (F \in L^2)$$

で与えると，$\hat{H}$に対し(1)が a.e. $t \in R^1$で成り立つ（$D = (-\infty, 0)$として）ことに注意すると，Corollary は Theorem の言い直しにすぎないことがわかる。

## 文献

[1] Pitt, L.D. On two problems from the spectral theory of stationary Gaussian processes. to appear.

[2] 河野敬雄 多重マルコフ性の定義といくつかの例について